第 11 講　3 次のグラフについて

11　次の各問いに答えよ．ただし，k は定数とする．

(1)　関数 $y=2x^3-3x^2+1$ のグラフをかけ．

(2)　関数 $f(x)=x^3-3(k+1)x^2+12kx$ の $x\geqq 0$ における最小値を求めよ．

(3)　方程式 $x^3-3x^2=k$ が異なる 3 つの実数解をもち，それらの中で最小のものを α とするとき，α のとり得る値の範囲を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 11 講　3 次のグラフについて

11　関数 $y=\frac{1}{3}x^3-x^2+(1-a^2)x$ の $0\leqq x\leqq 2$ における最大値を $f(a)$，最小値を $g(a)$ とする．$a\geqq 0$ のとき，関数 $f(a)$ と $g(a)$ について $b=f(a)$ と $b=g(a)$ のグラフをかけ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第11講　3次のグラフについて

11　次の各問いに答えよ．ただし，k は定数とする．

(1)　関数 $y=2x^3-3x^2+1$ のグラフをかけ．

(2)　関数 $f(x)=x^3-3(k+1)x^2+12kx$ の $x \geqq 0$ における最小値を求めよ．

(3)　方程式 $x^3-3x^2=k$ が異なる3つの実数解をもち，それらの中で最小のものを α とするとき，α のとり得る値の範囲を求めよ．

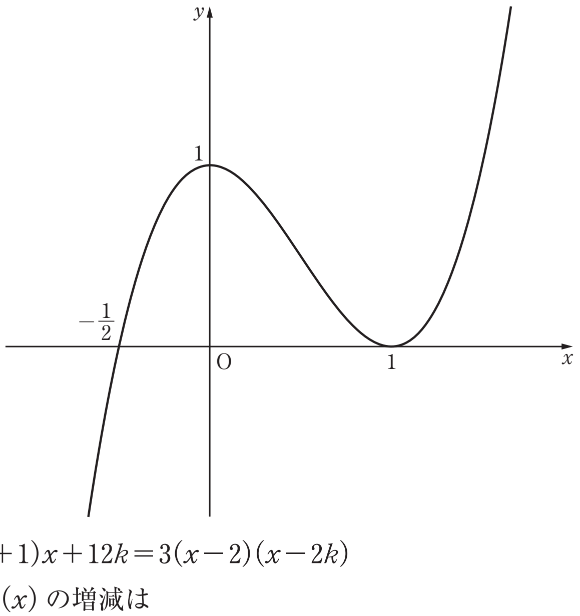
【答】 (1) 略　(2) $\begin{cases} 4k^2(3-k) & (k>3) \\ 0 & \left(\dfrac{1}{3} \leqq k \leqq 3\right) \\ 4(3k-1) & \left(k<\dfrac{1}{3}\right) \end{cases}$　(3) $-1<\alpha<0$

【解答】

(1)　$y'=6x(x-1)$ より，y の増減は

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	1	↘	0	↗

となる．また，$y=(2x+1)(x-1)^2$ よりグラフは下図．



(2)　$f'(x)=3x^2-6(k+1)x+12k=3(x-2)(x-2k)$

(I)　$k>1$ のとき，$f(x)$ の増減は

x	$\cdots$	2	$\cdots$	$2k$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$f(2)$	↘	$f(2k)$	↗

となる．このとき $f(3-k)=f(2k)$ である．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(Ⅰ-ⅰ)　$3-k \geqq 0$ すなわち $1<k\leqq 3$ のとき，最小値は $f(0)=0$

(Ⅰ-ⅱ)　$3-k<0$ すなわち $k>3$ のとき，最小値は $f(2k)=4k^2(3-k)$

(Ⅱ)　$k=1$ のとき，$f'(x)=3(x-2)^2\geqq 0$ より $x\geqq 0$ で $f(x)$ は増加関数，よって最小値は $f(0)=0$

(Ⅲ)　$k<1$ のとき，$f(x)$ の増減は

x	$\cdots$	$2k$	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$f(2k)$	↘	$f(2)$	↗

となる．このとき $f(3k-1)=f(2)$ である．

(Ⅲ-ⅰ)　$3k-1\geqq 0$ すなわち $\dfrac{1}{3}\leqq k<1$ のとき，最小値は $f(0)=0$

(Ⅲ-ⅱ)　$3k-1<0$ すなわち $k<\dfrac{1}{3}$ のとき，最小値は $f(2)=4(3k-1)$

以上より，求める最小値は

$$\begin{cases} \boldsymbol{4k^2(3-k)} & \boldsymbol{(k>3)} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\left(\dfrac{1}{3}\leqq k\leqq 3\right)} \\ \boldsymbol{4(3k-1)} & \boldsymbol{\left(k<\dfrac{1}{3}\right)} \end{cases}$$

(3)　$f(x)=x^3-3x^2$ とおくと，$f'(x)=3x(x-2)$ より $f(x)$ の増減は

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	0	↘	-4	↗

となるので，$y=f(x)$ と $y=k$ のグラフが異なる 3 つの共有点をもつ条件は $-4<k<0$ となる．また，$f(-1)=-4=f(2)$ である．

この範囲で k を動かすとき，$y=f(x)$ と $y=k$ のグラフの共有点の x 座標で最小のものが α であるから，α のとり得る値の範囲は

$$\boldsymbol{-1<\alpha<0}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 11 講　３次のグラフについて

11　関数 $y=\frac{1}{3}x^3-x^2+(1-a^2)x$ の $0\leqq x\leqq 2$ における最大値を $f(a)$，最小値を $g(a)$ とする．$a\geqq 0$ のとき，関数 $f(a)$ と $g(a)$ について $b=f(a)$ と $b=g(a)$ のグラフをかけ．

【答】 略

【解答】

$h(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+(1-a^2)x$ とおくと

$$h'(x)=x^2-2x+(1-a)(1+a)$$
$$=(x-1+a)(x-1-a)$$

(Ⅰ)　$a=0$ のとき，増減は

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$h'(x)$		$+$	0	$+$	
$h(x)$	0	↗		↗	$\frac{2}{3}$

となるので最大値 $\frac{2}{3}$，最小値 0

(Ⅱ)　$0<a\leqq 1$ のとき，増減は

x	0	$\cdots$	$1-a$	$\cdots$	$1+a$	$\cdots$	2
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	0	↗		↘		↗	

となる．

$$h(1+a)=\frac{1}{3}(1+a)^3-(1+a)^2+(1-a^2)(1+a)$$
$$=\frac{1}{3}(1+a)^2\{(1+a)-3+3(1-a)\}$$
$$=\frac{1}{3}(1+a)^2(1-2a)$$

であるから，$0<a<\frac{1}{2}$ のとき $h(1+a)>0$ より最小値は 0,

$\frac{1}{2}\leqq a\leqq 1$ のとき $h(1+a)\leqq 0$ より最小値は $h(1+a)=\frac{1}{3}(1+a)^2(1-2a)$

また

$$h(1-a)=\frac{1}{3}(1-a)^3-(1-a)^2+(1-a^2)(1-a)$$
$$=\frac{1}{3}(1-a)^2(1+2a)$$
$$h(2)=-2a^2+\frac{2}{3}$$

より

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$$h(1-a)-h(2)=\frac{1}{3}(1+a)^2(2a-1)$$

となるので，

$0<a<\frac{1}{2}$ のとき $h(1-a)<h(2)$ より最大値は $h(2)=-2a^2+\frac{2}{3}$，

$\frac{1}{2}\leqq a\leqq 1$ のとき $h(1-a)\geqq h(2)$ より最大値は $h(1-a)=\frac{1}{3}(1-a)^2(1+2a)$

(Ⅲ)　$a>1$ のとき，増減は

x	0	$\cdots$	2
$h'(x)$		$-$	
$h(x)$	0	↘	

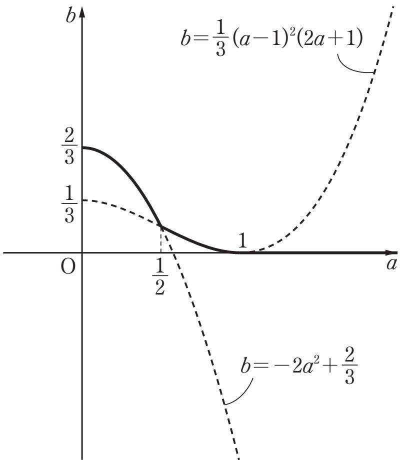
したがって最大値 0，最小値 $h(2)=-2a^2+\frac{2}{3}$

よって

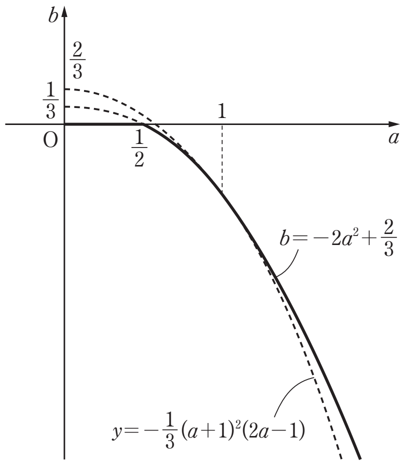
$$\text{最大値 } f(a)=\begin{cases}-2a^2+\frac{2}{3} & \left(0\leqq a<\frac{1}{2}\right)\\ \frac{1}{3}(a-1)^2(2a+1) & \left(\frac{1}{2}\leqq a\leqq 1\right)\\ 0 & (a>1)\end{cases}$$

$$\text{最小値 } g(a)=\begin{cases}0 & \left(0\leqq a<\frac{1}{2}\right)\\ -\frac{1}{3}(a+1)^2(2a-1) & \left(\frac{1}{2}\leqq a\leqq 1\right)\\ -2a^2+\frac{2}{3} & (a>1)\end{cases}$$

ゆえに $f(a)$ と $g(a)$ のグラフは下図の実線.



$b=f(a)$ のグラフ



$b=g(a)$ のグラフ

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。